

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

La page 6/6 est une annexe à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.

Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p .

On sait que $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $p(\bar{A}) = \frac{3}{5}$.

La probabilité de l'événement B est égale à :

- a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.

On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'événement $(X \leq t)$, notée $p(X \leq t)$, est

donnée par : $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

- a. 0,91 b. 0,18 c. 0,19 d. 0,82

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien

avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$.

Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

- a. $\frac{9}{10}$ b. $\frac{27}{40}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{27}{28}$

EXERCICE 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe, page 6.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).
c) Étudier la position relative de (D) et de (C).
d) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.
e) En déduire la limite de f en $-\infty$.
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.
b) En déduire les variations de la fonction f .

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n , l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$
2. On admet que pour tout réel x , $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.
Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leq 1$.
3. La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

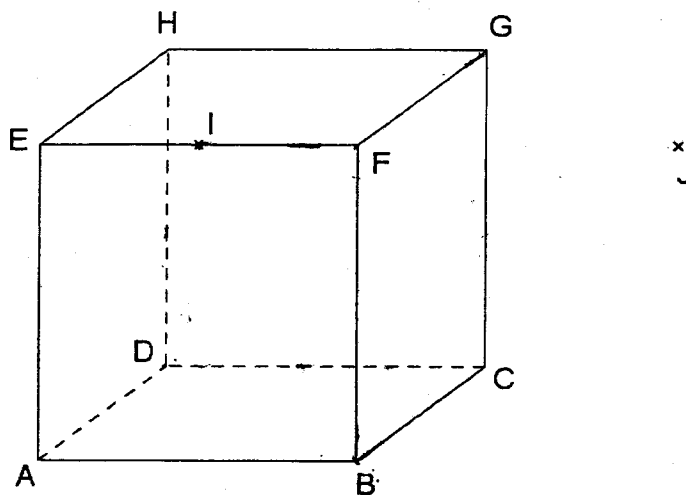
1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.
Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

EXERCICE 3 (4 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.



1. a) Déterminer les coordonnées des points I et J.
b) Vérifier que le vecteur \overline{DJ} est un vecteur normal au plan (BGI).
c) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
d) Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
 - a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
 - b) Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.
 - c) Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$.
 - d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3} iz^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.
b) Placer les points A', B' et C'.
c) Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.
2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f .
a) Déterminer les affixes des points G et G'.
b) Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?
3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)